$$\|T_n(x)-f(x)\|=\sqrt{\int_a^b [T_n(x)-f(x)]^2dx}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (40)$$

Сонда (39) бен (40) және үшбұрыш теңсіздігінен
$\|F(x)-f(x)\| \le \|f(x)-T_n(x)\|+\|T_n(x)-f(x)\|<\varepsilon$ теңсіздігін аламыз. Мұны мен ε-нің кез келген болғандықтан $\|F(x)-f(x)\|=0$, яғни $F(x)=f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.
Ескерту. $[a, b]$ кесіндісінің $[-\pi, \pi]$ кесіндісімен бірдей болуы да мүмкін.

Әдебиеттер: [1], 201-204 б., [2].

№24-25 ДӘРІС. ЖҰП ЖӘНЕ ТАҚ ФУНКЦИЯЛАР. СИНУСТАР НЕ КОСИНУСТАР БОЙЫНША ФУРЬЕ ҚАТАРЛАРЫ.

Дәрістің мақсаты: Жұп және тақ функциялардың анықтамаларын білу. Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатарының коэффициенттерін таба білу. Мұндай функциялардың синустар немеес косинустар бойынша Фурье қатарын анықтай білу.

Егер бүкіл OX осінде анықталған функция $f(x)$ үшін координаталар басына симметриялы орналасқан кез келген кесіндісінде $f(x)=f(-x)$ теңдігі орындалса – жұп, ал $f(x)=-f(-x)$ теңдігі орындалса – тақ функция деп аталатыны белгілі.

Жұп функция үшін

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(-x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(-x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=$$

$$=-\int_{\pi}^{0} f(u)du+\int_{0}^{\pi} f(u)du=\int_{0}^{\pi} f(u)du+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

ал тақ функция $f(x)$ үшін:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{-\pi}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx =$$

$$= \int_{\pi}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = -\int_{0}^{\pi} f(u)\,du + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \quad (2)$$

болғандықтан, $f(x)$ функциясы жұп болғанда, оған сәйкес Фурье қатарының коэффициенттері

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (3)$$

формуласы бойынша табылады да, барлық

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \quad (4)$$

болады, өйткені көбейтінді $f(x)\sin nx$ — тақ функция.

Егер $f(x)$ — тақ функция болса, $a_n = 0$ (көбейтінді $f(x)\cos nx$ — тақ функция)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (5)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

(4) мен (5) формулалардан жұп функцияға сәйкес Фурье қатары

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (6)$$

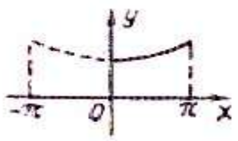
ал тақ функцияға сәйкес Фурье қатары

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin kx \quad (7)$$

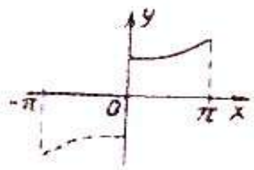
түрінде болатыны айқын.

Бұл формулалар интегралданатын функция $[0, \pi]$ кесіндісінде берілген жағдайларда да колданылады.

Әрине, бұл функцияны $[0, \pi]$ кесіндісінен $[-\pi, 0]$ кесіндісіне жұп не тақ түрде созсақ (31, 32-чертёждер) пайда болған жұп



31-чертёж.



32-чертёж.

Егер

$$t = \frac{\pi}{l} x \tag{3}$$

ауыстырмасын енгізсек,

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \varphi(t) \tag{4}$$

функциясы

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{5}$$

қатарына жіктеліп, коэффициенттері (4), (10), (11) § 5 формулалары бойынша есептеледі.

Егер $f(x)$ функциясы $[-l, l]$ кесіндісінде интегралданатын не жұп, не тақ функция болса, оған мына қатарлар сәйкес келеді, яғни:
$f(x)$ жұп болса

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x, \tag{6}$$

$f(x)$ тақ болса

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{7}$$

ал коэффициенттер (6) үшін

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(7) үшін

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = , 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

формулаларымен есептеледі.

Ескерту. $[0, l]$ кесіндісінде берілген интегралданатын $f(x)$ функциясын $[0, l]$ кесіндісінен $[-l, 0]$ кесіндісіне жұп не тақ түрде созғанда шығатын және $[0, l]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясына айналатын созынды функцияға сәйкес (6) не (7) қатарды құру мүмкін болады.

№26-27 ДӘРІС. ПЕРИОДЫ 2П ФУНКЦИЯНЫҢ ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ ӘДЕТТЕГІ ЖИНАҚТАЛЫСЫ. ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ ЖИНАҚТАЛУ БЕЛГІСІ.

Дәрістің мақсаты: Бессель теңсіздігін қорытып шығару, абсолют интегралданатын функция үшін негізгі лемманы дәлелдеу, Фурье қатарының дербес қосындылары үшін Дирихле интегралын, локаольдау принципін меңгеру. Фурье қатарының жинақталу белгісін дәлелдей білу.